Міністерство освіти і науки, молоді і спорту України
Хмельницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
Відділ освіти Старокостянтинівської районної державної адміністрації

Гринчук Людмила Володимирівна
Сорока Олена Олександрівна

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Хмельницький - 2012

ЗМІСТ

ВСТУП

Загальновідомо, що розв'язування завдань є найважливішим засобом формування у школярів системи основних математичних знань, умінь і навичок, провідною формою навчальної діяльності учнів у процесі навчання математики, є одним з основних засобів їх математичного розвитку.

Орієнтуючи школярів на пошуки гарних, витончених рішень математичних задач, вчитель тим самим сприяє естетичному вихованню учнів і підвищенню їх математичної культури. І все ж головна мета завдань - розвинути творче і математичне мислення учнів, зацікавити їх математикою, призвести до "відкриття" математичних фактів.

Досягти цієї мети за допомогою одних стандартних завдань неможливо. Необхідні завдання, спрямовані на виховання в учнів стійкого інтересу до вивчення математики, творчого ставлення до навчальної діяльності математичного характеру. Необхідні спеціальні вправи для навчання школярів способам самостійної діяльності, для оволодіння ними методами наукового пізнання реальної дійсності та прийомами розумової діяльності, якими користуються вчені-математики, вирішуючи ту чи іншу задачу.

Починаючи з 60-х років, до змісту різних олімпіад – від шкільних та міських до міжнародних – стали включати функціональні рівняння та нерівності, а зараз уже простежується ідея включення таких рівнянь та нерівностей до змісту завдань зовнішнього незалежного оцінювання з математики. Отже, бажаючих навчитися розв'язувати такого роду задачі стає більше. Тому з упевненістю можна твердити, що тема «Функціональні рівняння та методи їх розв'язання» є цілком актуальною.

Метою цієї роботи стала систематизація методів розв'язання функціональних рівнянь, та методику застосування цих рівнянь у шкільному курсі математики.

РОЗДІЛ 1. КОМПОЗИЦІЯ ФУНКЦІЙ.

ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ.

При розв'язуванні олімпіадних задач різного рівня доволі часто зустрічаються завдання на композицію функцій, функціональні рівняння та нерівності, які потребують нетрадиційного підходу до розв'язання, однак, в шкільних підручниках не приділяється цьому питанню потрібної уваги.

Вперше учні загальноосвітніх класів зустрічаються з поняттям «композиція функцій» в процесі вивчення теми «Похідна та її застосування» при виведенні формули похідної складеної функції. Але використання цього ж поняття навіть в достатньо простих задачах з інших тем шкільного курсу викликає значні труднощі.

Крім того, при розв'язуванні таких задач не підходить жоден з відомих стандартних алгоритмів, і учням необхідно застосовувати більш широкий спектр теоретичних знань, виявляти кмітливість та вміння логічно міркувати. Отже, вивчення школярами даної тематики сприяє розвитку пізнавального інтересу, дозволяє відпрацювати різні способи розв'язання задач при підготовці до ЗНО, олімпіадам різного рівня та вступним екзаменам у вузи.

На початку нагадаємо означення.

Нехай задані дві функції $y = f(x)$ і $x = g(t)$ так що область визначення функції f містить множину значень функції g. Тоді кожному числу t з області визначення функції g відповідає значення $x = g(t)$, яке належить області визначення функції f, а йому, в свою чергу, відповідає число $y = f(x)$. Таким чином, кожному числу t з області визначення функції g ставиться у відповідність єдине число y з множини значень функції f, а це означає що на області визначення функції g задана функція, яку називають *складеною функцією* або *композицією функцій*. При цьому записують $y = f(g(x))$.

Приклад 1. *Подайте функцію* $y = \sqrt{2x^3 + 3}$ *як композицію інших елементарних функцій.*

Розв'язання. Розглянемо функції $g(x)=2x^3+3$ і $f(x)=\sqrt{x}$. Тоді $y=\sqrt{2x^3+3}=f(g(x))$.

Приклад 2. *Дана функція* $y=x^2$. *Знайти : а)* $y(-x)$; *б)* $y(x-1)$; *в)* $y\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. а) Функція $y(-x)$ являє собою композицію функцій $y(x)=x^2$ і $g(x)=-x$. Тоді $y(-x)=y(g(x))=(g(x))^2=(-x)^2=x^2$.

б) Функція $y(x-1)$ композицію являє собою композицію функцій $y(x)=x^2$ і $g(x)=x-1$. Тоді $y(x-1)=y(g(x))=(g(x))^2=(x-1)^2=x^2-2x+1$.

в) Функція $y\left(\dfrac{1}{x}\right)$ являє собою композицію функцій $y(x)=x^2$ и $g(x)=\dfrac{1}{x}$. Тоді

$$y\left(\frac{1}{x}\right)=y(g(x))=(g(x))^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}.$$

Відповідь: а) $y(-x)=x^2$; б) $y(x-1)=x^2-2x+1$; в) $y\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}$.

Приклад 3 Знайти $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$, *якщо* $g(x)=\sqrt[3]{x(x-4)}$ *при* $|x|\neq 2$.

Розв'язання. Функція $g(x)$ визначена при $x\in(-\infty;+\infty)$, $g(2-x)$ – композиція функцій $g(x)$ і $f(x)=2-x$, а $g(2+x)$ – композиція $g(x)$ і $h(x)=2+x$. Тоді

$$g(2-x)=g(f(x))=\sqrt[3]{(2-x)((2-x)-4)}=\sqrt[3]{(2-x)(-2-x)}=\sqrt[3]{(x-2)(2+x)},$$

$$g(2+x)=g(h(x))=\sqrt[3]{(2+x)((2+x)-4)}=\sqrt[3]{(2+x)(x-2)}.$$

Тобто, вираз $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}$ має зміст при усіх $|x|\neq 2$ і $\dfrac{g(2-x)}{g(2+x)}=\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)(2+x)}{(2+x)(x-2)}}=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 4. *Для функції* $f(x)=2x-3$ *знайдіть* $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$.

Розв'язання. Функція $f(f(x))$ являє композицію «самої себе». Тоді $f(f(x))=2(2x-3)-3=4x-9$.

Функція $f(f(f(x)))$ являє композицію функцій $f(x)=2x-3$ і $g(x)=f(f(x))$. Тоді $f(f(f(x)))=f(g(x))=2g(x)-3=2(4x-9)-3=8x-21$.

Відповідь: $f(f(x))=4x-9$, $f(f(f(x)))=8x-21$.

Приклад 5. *Дана функція* $f(x)=-x^2+4x-3$. *Розв'язати рівняння* $f(2x+3)=4f(x-2)$

.

Розв'язання. Для усіх дійсних *x*:

$$f(2x+3)=-(2x+3)^2+4(2x+3)-3=-4x^2-4x,$$

$$f(x-2)=-(x-2)^2+4(x-2)-3=-x^2+8x-15.$$

Тоді рівняння $f(2x+3)=4f(x-2)$ приймає вид:

$$-4x^2-4x=-4x^2+32x-60 \Leftrightarrow 36x=60 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Відповідь: $\frac{5}{3}$.

Приклад 6. Дана функція $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Розв'язати нерівність $2f(x+3)<f(3x+5)$.

Розв'язання. $f(x+3)=\dfrac{x+3}{(x+3)+1}=\dfrac{x+3}{x+4}$, $f(3x+5)=\dfrac{3x+5}{(3x+5)+1}=\dfrac{3x+5}{3x+6}$. Тоді нерівність $2f(x+3)<f(3x+5)$ примає вид:

$$\frac{2x+6}{x+4}<\frac{3x+5}{3x+6} \Leftrightarrow \frac{2x+6}{x+4}-\frac{3x+5}{3x+6}<0 \Leftrightarrow \frac{3x^2+13x+16}{3(x+4)(x+2)}<0.$$

Оскільки $3x^2+13x+16>0$ для усіх дійсних *x*, то остання нерівність виконується при $x\in(-4;-2)$.

Відповідь: $(-4;-2)$.

Приклад 7 . Знайдіть значення $f(f(1))$, якщо

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-2,\\ -x-5, & x\geq -2.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку $f(1)$. Оскільки $1\geq -2$, то $f(1)=-1-5=-6$. Значить, $f(f(1))=f(-6)$. Оскільки $-6<-2$, то $f(-6)=2\cdot(-6)+1=-11$.

Отже, $f(f(1))=-11$.

Відповідь: -11.

Приклад 8. Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Розв'язати нерівність $f(g(x-9))\geq f(4)$.

Розв'язання. Оскільки $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f(g(x-9)) = f\left(\sqrt{x-9}\right) = \frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2 - 14\sqrt{x-9} + 33}{9 - \left(\sqrt{x-9}\right)^2}.$$

З того що $f(4) = 1$, випливає що нерівність $f(g(x-9)) \geq f(4)$ приймає вид:

$$\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2 - 14\sqrt{x-9} + 33}{9 - \left(\sqrt{x-9}\right)^2} \geq 1.$$

Нехай $\sqrt{x-9} = t$, тоді $t \geq 0$ і маємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2 - 14t + 33}{9 - t^2} \geq 1, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 - 7t + 12}{t^2 - 9} \leq 0, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t-4}{t+3} \leq 0, \\ t \geq 0, t \neq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq t < 3, \\ 3 < t \leq 4. \end{array} \right.$$

Вертаючись до змінної x, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x-9} < 3, \\ 3 < \sqrt{x-9} \leq 4; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x-9 < 9, \\ 9 < x-9 \leq 16; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 \leq x < 18, \\ 18 < x-9 \leq 25. \end{array} \right.$$

Відповідь: $[9; 18) \cup (18; 25]$.

Приклад 9. Нехай $f(x) = \frac{x}{3} + 2$. Знайти значення функції $\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{раз}}(x))\ldots)$ в точці $x = 4$.

Розв'язання. Встановимо вид функції $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)$ для перших трьох натуральних значень n.

При $n = 1$: $\qquad f(x) = 2 + \frac{x}{3}$.

При $n = 2$: $\qquad f(f(x)) = 2 + \dfrac{2 + \frac{x}{3}}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{x}{3^2}$.

При $n = 3$: $\qquad f(f(f(x))) = 2 + \dfrac{2 + \frac{2}{3} + \frac{x}{3^2}}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{x}{3^3}$.

Виникає припущення, що $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots) = \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^{n-1}}\right) + \frac{x}{3^n}$. Доведемо це твердження методом математичної індукції.

При $n = 1$, згідно умови задачі, $f(x) = 2 + \frac{x}{3}$. Твердження вірне.

Нехай при $n=k$ твердження вірне, и функція $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)$ має вид:

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{k\text{ раз}}(x))\ldots)=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k-1}}\right)+\frac{x}{3^k}.$$

Доведемо, що при $n=k+1$ функція $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)$ має вид:

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{(k+1)\text{ раз}}(x))\ldots)=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k}}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}.$$

Дійсно,

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{(k+1)\text{ раз}}(x))\ldots)=f\left(\underbrace{f(\ldots f(f}_{k\text{ раз}}(x))\ldots)\right)=2+\frac{\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k-1}}\right)+\frac{x}{3^k}}{3}=$$

$$=2+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^k}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^k}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}.$$

Що і потрібно було довести.

Отже, $\underbrace{f(\ldots f(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}\right)+\frac{x}{3^n}$ при усіх натуральних *n*. Внаслідок цього, при $n=2009$:

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{раз}}(x))\ldots)=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{2008}}\right)+\frac{x}{3^{2009}}.$$

В останньому співвідношенні вираз, який міститься в дужках, є сумою перших 2009 членів геометричної прогресії із знаменником $q=\frac{1}{3}$ і першим членом, що дорівнює 2. Тоді

$$\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{раз}}(x))\ldots)=2\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{2009}}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{x}{3^{2009}},\qquad \text{або}\qquad \underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{раз}}(x))\ldots)=3+\frac{x-3}{3^{2009}}.$$

Підставляючи в останнє співвідношення $x=4$, одержимо відповідь: $\underbrace{f(\ldots f(f}_{2009\text{раз}}(x))\ldots)=3+\frac{1}{3^{2009}}$.

Відповідь: $3+3^{-2009}$.

Приклад 10. Побудувати графік функції $y = 3\left| f(f(x)) \right| + 1$, де $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

Розв'язання. Виконаємо (згідно означення композиції функцій) формальні перетворення:

$$f(f(x)) = \frac{f(x)+2}{f(x)-1} = \frac{\dfrac{x+2}{x-1}+2}{\dfrac{x+2}{x-1}-1} = x .$$

Знайдемо область визначення функції $f(f(x))$:

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ f(x) \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ \dfrac{x+2}{x-1} \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Таким чином, функція $y = 3\cdot\left| f(f(x)) \right| + 1$ може бути подана у вигляді:

$$\begin{cases} y = |3x| + 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} 1 - 3x, & x < 0\,, \\ 3x + 1, & x \geq 0, \quad x \neq 1. \end{cases}$$

Графік функції $y = 3\cdot\left| f(f(x)) \right| + 1$ зображено на рис. 1.

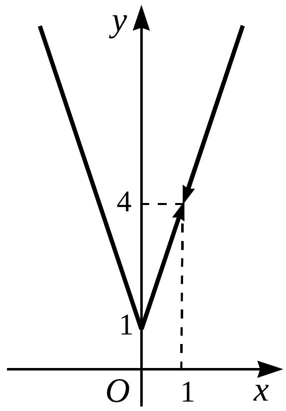


Рис. 1

Приклад 11. Зобразити на площині Oxy множину точок, координати яких задовольняють умову $|y| = f\left(\dfrac{4}{f(x)}\right)$, де $f(x) = 1 - |x|$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння, що задає на площині *Oxy* шукану множину точок:

$$|y| = f\left(\frac{4}{f(x)}\right) \Leftrightarrow |y| = f\left(\frac{4}{1-|x|}\right) \Leftrightarrow |y| = 1 - \left|\frac{4}{1-|x|}\right| \Leftrightarrow |y| = 1 - \frac{4}{\big||x|-1\big|} .$$

Множина точок на площині *Oxy*, що задовольняє рівнянню $|y| = 1 - \dfrac{4}{\big||x|-1\big|}$, зрозуміло, симетрична відносно координатних осей. Тому можна зобразити точки цієї множини в першій координатній чверті, а потім послідовно симетрично відобразити графік відносно осей *Ox* і *Oy*. Отже, при $x \geq 0$ і $y \geq 0$ рівняння

$|y| = 1 - \dfrac{4}{\left||x|-1\right|}$ приймає вид $y = 1 - \dfrac{4}{|x-1|}$. Тоді, розкриваючи за означенням модуль, одержуємо:

$$\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0, \\ y = 1 - \dfrac{4}{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le x < 1,\ y \ge 0, \\ y = 1 + \dfrac{4}{x-1}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1,\ y \ge 0, \\ y = 1 - \dfrac{4}{x-1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Оскільки при $0 \le x < 1$ значення $y = 1 + \dfrac{4}{x-1}$ від'ємні, то в першій координатній чверті немає точок, які задовольняють систему

$$\begin{cases} 0 \le x < 1,\ y \ge 0, \\ y = 1 + \dfrac{4}{x-1}. \end{cases}$$

Множина точок на координатній площині, які задовольняють систему

$$\begin{cases} x \ge 1,\ y \ge 0, \\ y = 1 - \dfrac{4}{x-1}, \end{cases}$$

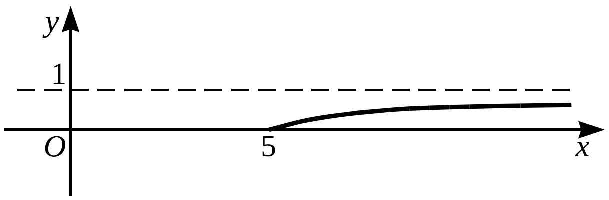


Рис. 2*а*

зображено на рис. 2*а*. Остаточно, графічне зображення множини точок на площині *Oxy*, координати яких задовольняють умову $|y| = 1 - \dfrac{4}{\left||x|-1\right|}$, показано на рис. 2*б*.

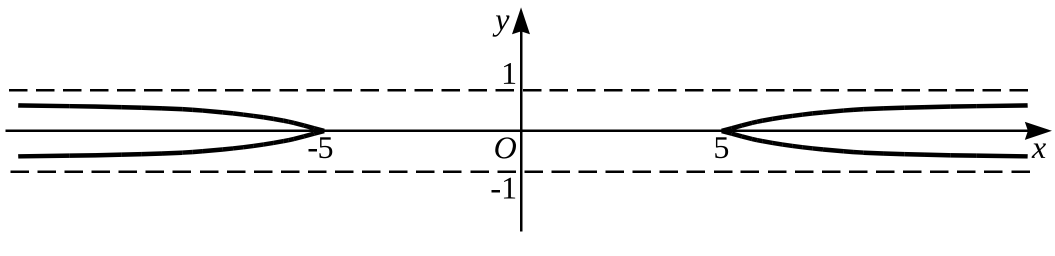


Рис. 2*б*

Приклад 12. Побудуйте графік функції $y = f(f(x))$, де

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x \le 1, \\ 5-2x, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Згідно означення композиції функцій:

$$f(f(x))=\begin{cases} f(x)+2\,, \\ 5-2f(x). \end{cases}$$

Формально можливі наступні чотири випадки:

$$f(f(x))=\begin{cases} (x+2)+2, \\ (5-2x)+2, \\ 5-2(x+2), \\ 5-2(5-2x); \end{cases} \Leftrightarrow \ f(f(x))=\begin{cases} x+4, \\ 7-2x, \\ 1-2x, \\ 4x-5. \end{cases}$$

Знайдемо значення змінної x, при яких виконується кожен з цих чотирьох випадків.

Перший випадок виконується, коли: $\begin{cases} x\le 1, \\ x+2\le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ x\le -1; \end{cases} \Leftrightarrow \ x\le -1.$

Другий випадок виконується, коли: $\begin{cases} x>1, \\ 5-2x\le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x\ge 2; \end{cases} \Leftrightarrow \ x\ge 2.$

Третій випадок виконується, коли: $\begin{cases} x\le 1, \\ x+2>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1, \\ x>-1; \end{cases} \Leftrightarrow \ -1<x\le 1.$

Четвертий виконується, коли: $\begin{cases} x>1, \\ 5-2x>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<2; \end{cases} \Leftrightarrow .1<x<2$

Таким чином,

$$f(f(x))=\begin{cases} x+4, & x\le -1, \\ 1-2x, & -1<x\le 1, \\ 4x-5, & 1<x<2, \\ 7-2x, & x\ge 2. \end{cases}$$

Графік функції $y=f(f(x))$ зображено на рис. 3.

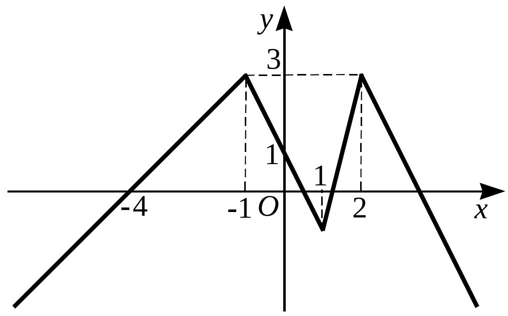


Рис. 3

А тепер розглянемо задачі, в яких потрібно знайти функцію, якщо задано деяке рівняння, в якому у якості невідомого виступає сама функція. Такі рівняння називають функціональними рівняннями.

Функціональне рівняння — це рівняння, в якому невідомими є функції (одна або декілька). Наприклад,

$$f(x)+xf(x+1)=1, \qquad f(x)+g(1-x)=f\left(g\left(\frac{2}{x+1}\right)\right),$$

Іншими словами, функціональним рівнянням називається співвідношення, що виражає певну властивість, якою володіє деякий клас функцій (деяка функція).

Найпростішими прикладами функціональних рівнянь можуть служити: $f(x)=f(-x)$ - рівняння парності, $f(x+T)=f(x)$ - рівняння періодичності та ін.

Функціональні рівняння виникають в самих різних областях математики, звичайно в тих випадках, коли потрібно описати всі функції, що володіють заданими властивостями. Термін функціональне рівняння зазвичай використовується для рівнянь, які не зводяться простими способами до алгебраїчних рівнянь. Ця неможливість найчастіше обумовлена тим, що аргументами невідомої функції в рівнянні є не самі незалежні змінні, а деякі дані функції від них.

Розв’язком функціонального рівняння називають функцію, яка на заданій множині перетворює рівняння в тотожність (якщо невідомих функцій декілька, то необхідно знайти їх всі). Функціональне рівняння вважається розв’язаним, якщо знайдено всі його розв’язки або доведено, що їх немає.

Багато функціональні рівняння містять кілька змінних. Всі ці змінні, якщо на них не накладено якісь обмеження, є незалежними.

Завжди чітко має бути обумовлено, на якому безлічі функціональне рівняння задається, тобто яка область визначення кожної невідомої функції. Загальне рішення функціонального рівняння може залежати від цієї множини.

Крім області визначення функцій, важливо знати, в якому класі функцій шукається рішення. Кількість і поведінка рішень дуже строго залежить від цього класу.

Завдання розв’язання функціональних рівнянь є одними з найдавніших в математичному аналізі. Вони з'явилися майже одночасно з зачатками теорії функцій. Перший справжній розквіт цієї дисципліни пов'язаний з проблемою паралелограма сил. Ще в 1769 році Д’Аламбер звів обґрунтування закону складання сил до вирішення функціонального рівняння

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot f(y) \tag{1}$$

Те саме рівняння і з тією ж метою було розглянуто Пуассоном в 1804 році при деякому припущенні аналітичності, тим часом як у 1821 році Коші (1789 - 1857) знайшов спільні рішення $f(x)=\cos ax,\ f(x)=chax=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$, $f(x)\equiv 0$

цього рівняння, припускаючи лише безперервність f (x). Навіть відома формула неевклідової геометрії для кута паралельності $f(x)=tg\dfrac{1}{2}\prod(x)=e^{\frac{-x}{k}}$ була отримана Н.І.Лобачевским (1792-1856) з функціонального рівняння:

$$f^2(x)=f(x-y)\cdot f(x+y) \qquad (2)$$

яке він вирішив методом, аналогічним методу Коші. Це рівняння можна привести до рівняння $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

Ряд геометричних завдань, що призводять до функціональних рівнянь, розглядав англійський математик Ч.Баббедж (1792-1871). Він вивчав, наприклад, періодичні криві другого порядку, що визначаються наступною властивістю для будь-якої пари точок кривої: якщо абсциса другої точки дорівнює ординаті першої, то ордината другої точки дорівнює абсцисі першої. Нехай така крива є графіком функції y = f (x); (x, f (x)) - довільна її точка. Тоді, згідно з умовою, точка з абсцисою f (x) має ординату x. Отже,

$$f(f(x))=x \qquad (3)$$

Функціональному рівнянню (3) задовольняють, зокрема, функції:

$$f(x)=\sqrt{a^2-x^2},\ x\in[0;|a|],\quad f(x)=\frac{a}{x},\ a\neq 0,$$

Одними з найпростіших функціональних рівнянь є рівняння Коші, які він докладно вивчив у своєму «Курсі Аналізу», виданому в 1821 році.

1. Рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$ в класі неперервних функцій має розв’язок $f(x)=ax$. Такий же розв’язок воно має і в класі монотонних функцій.

2. Рівняння $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ в класі неперервних функцій має розв’язок $f(x)=a^x$ (якщо не вважати $f(x)\equiv 0$).

3. Рівняння $f(x\cdot y)=f(x)+f(y),\ x,y>0$ в класі неперервних функцій має розв'язок $f(x)=\log_a x$ (якщо не вважати $f(x)\equiv 0$).

4. Рівняння $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\ x,y>0$ в класі неперервних функцій має розв'язок $f(x)=x^a$ (якщо не вважати $f(x)\equiv 0$).

Взагалі, для функціональних рівнянь, які не зводяться до диференціальних або інтегральних, відомо дуже мало спільних методів рішення. Розглянемо основні прийоми, які допомагають знайти розв'язок таких рівнянь.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

2.1 Метод зведення функціонального рівняння до відомого за допомогою заміни змінної та функції.

Приклад 1. Знайти всі неперервні функції, які задовольняють рівняння

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy.$$

Розв'язання. В якості допоміжної функції візьмемо функцію $g(x)=f(x)-x^2$.

Підставимо у вихідне рівняння $f(x)=g(x)+x^2$, одержимо

$g(x+y)+(x+y)^2=g(x)+x^2+g(y)+y^2+2xy$, $\qquad g(x+y)=g(x)+g(y)$,

тобто функція $g(x)$ задовольняє першому рівнянню Коші, звідки $f(x)=g(x)+x^2=ax+x^2$.

Приклад 2. Знайти всі неперервні функції $f:(0;+\infty)\to R$, які задовольняють рівняння $f(xy)=xf(y)+yf(x)$

Розв'язання. Поділимо рівняння на xy, одержимо: $\dfrac{f(xy)}{xy}=\dfrac{f(y)}{y}+\dfrac{f(x)}{x}$

Застосуємо допоміжну функцію $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, тоді одержимо рівняння

$g(xy)=g(x)+g(y)$, тобто функція $g(x)$ задовольняє третьому рівнянню Коші, звідки $f(x)=x\log_a x$.

Приклад 3. Знайти неперервні функції $f(x)$, які задовольняють умови

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2} \qquad (1.1)$$

Розв'язання. Спробуємо звести це рівняння до функціонального рівняння Коші $f(x+y)=f(x)+f(y)$ с неперервним розв'язком $f(x)=Cx$. Нехай *y=0*, тоді $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(0)}{2}$. Оскільки $f(0)$ - незмінне число, позначимо його через C_1 і одержимо $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)}{2}+\frac{C_1}{2}$. Надамо тепер x значення $x+y$. Маємо $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)}{2}+\frac{C_1}{2}$. З рівняння (1.1) одержимо $\frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}=\frac{f(x+y)}{2}+\frac{C_1}{2}$, або

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-C_1 \qquad (1.2).$$

Розв'язком рівняння (1.2) є функція $y=C\cdot f(x)$. Отже, розв'язком рівняння (1.1) буде функція $y=C\cdot f(x)+C_1$.

Відповідь: $C\cdot f(x)+C_1$

2.2 Знаходження розв'язку функціональних рівнянь лінійного виду

Функціональне рівняння виду: $g_1(x)\cdot f(x)=g_2(x)$, (2.1) де $f:R\to R$ являється невідомою функцією, а функції $g_1:R\to R$, $g_2:R\to R$, називається *рівнянням лінійного виду*.

Розв'язком функціонального рівняння (2.1) будемо вважати функцію $f(x)$, яка не порушує знак рівності та не обмежує умов існування функцій $g_1(x), g_2(x)$.

Розв'язують функціональні рівняння лінійного виду таким чином:

1) розглядають випадок $0\cdot f(x)=0$, тобто знаходять таку множину А значень аргументу, коли $g_1^2(x)+g_2^2(x)=0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння розв'язком є будь-яка визначена на множині А.

2) розглядають випадок $0\cdot f(x)=k$, де $k\neq 0$, тобто знаходять таку множину В значень аргументу, коли $g_1(x)=0$ *і* $g_2(x)\neq 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння не існує розв'язку, що визначений на множині В.

3) розглядають випадок $k\cdot f(x)\neq 0$, де $k\neq 0$, тобто знаходять таку множину С значень аргументу, коли $g_1(x)\neq 0$ *і* $g_2(x)=0$. Для цієї множини ОДЗ даного

рівняння існує розв'язок, що визначений на множині С, але при умові $f(x)=0$ для $\forall x \in C$.

4) розглядають випадок $k \cdot f(x)=a$, де $k \neq 0$ та $a \neq 0$, тобто знаходять таку множину *D* значень аргументу, коли $g_1(x) \neq 0$ *і* $g_2(x) \neq 0$. Для цієї множини ОДЗ даного рівняння існує розв'язок, що визначений на множині *D*, але при умові $f(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ для $\forall x \in D$.

Застосуємо композицію взаємно обернених функцій до розв'язку функціональних рівнянь лінійного виду при тій умові, що невідома функція $f: R \to R$ представлена у вигляді складеної, тобто $g_1(x) \cdot f(p(x)) = g_2(x)$, (2.2)

де $g_1: R \to R \setminus \{0\}$, $g_2: R \to R$, $p: R \to R$.

Якщо до аргументу невідомої функції в рівнянні (2.2) формально застосувати композицію взаємно обернених функцій, тобто: $g_1(p^{-1}(x)) \cdot f(p^{-1}(x)) = g_2(p^{-1}(x))$, (2.3)

дістанемо рівняння виду (2.1). Таким чином, якщо для аргументу p(x) невідомої функції у рівнянні (2.2) вдається знайти обернену функцію, то виконавши заміну аргументу на композицію взаємно обернених функцій отримаємо формальний розв'язок функціонального рівняння:

$$f(x)=\frac{g_2(p^{-1}(x))}{g_1(p^{-1}(x))} \qquad (2.4)$$

Взагалі центральним питанням теорії найпростіших функціональних рівнянь є не стільки практичний пошук розв'язків, стільки питання про існування на певній множині операцій з функціями розв'язку.

Варто звернути увагу на те, що проблема рівносильних перетворень функціональних рівнянь завжди актуальна під час практичного пошуку розв'язків. Тому перетворювати функціональне рівняння треба так, аби не зникли його розв'язки.

Приклад 4. Знайти функцію $f: R \to R$, якщо $(1+x^2)f(2x-6)=1-x$

Розв'язання: Розпочнемо конструювати взаємно обернену функцію. Нехай $y=2x-6$ y=2x-6. Замінимо *x* на *y*. А потім виразимо *y* через *x*: $x=2y-6$, звідси $2y=x+6$, остаточно $y=0{,}5 \cdot x+3$. Таким чином, $p^{-1}(x)=0{,}5 \cdot x+3$ та $p(x)=2x-6$

являються взаємно оберненими функціями. Тепер застосуємо композицію, тобто, замінимо x на $0{,}5x+3$:

$$\left(1+(0{,}5x+3)^2\right)f\left(2(0{,}5x+3)-6\right)=1-(0{,}5x+3)\Rightarrow$$
$$\left(0{,}25x^2+3x+10\right)\cdot f(x)=-0{,}5x-2\Rightarrow f(x)=\frac{-0{,}5x-2}{0{,}25x^2+3x+10}$$

Перевіряємо, безпосередньо підставивши знайдену функцію у дане рівняння.

Відповідь: $f(x)=\dfrac{-0{,}5x-2}{0{,}25x^2+3x+10}$.

2.3 Знаходження розв'язків функціональних рівнянь у вигляді многочленів

Звертаємо особливу увагу на те, що у даному розділі запропоновано спосіб розв'язування функціональних рівнянь, що використовує конструктивний характер розв'язку, за допомогою способу невизначених коефіцієнтів. Але зазначаємо, що функціональне рівняння – це, як правило, співвідношення, що задає деякий клас функцій, за якоюсь формальною властивістю (формулою) та додатковими обмеженнями на шукану функцію. Тому розв'язування функціональних рівнянь потребує не лише побудови якоїсь однієї функції, а й знаходженню всієї множини функцій або доведенню, що розв'язків не існує. Зазначимо, що зразки розв'язувань функціональних рівнянь даного розділу не будуть містити доведення того, що рівняння не мають інших розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати функціональне рівняння $f: R\to R$

$$f(x)+f(x+5)=10\cdot x+11 \qquad (3.1)$$

Розв'язання: Розпочнемо конструювати розв'язок у вигляді лінійної функції: $f(x)=ax+b,\ де\ \mathrm{a}\in\mathrm{R},\ \mathrm{b}\in\mathrm{R}$ (3.2)

Підставимо в аргумент шуканої функції $x+5$:

$$f(x+5)=a(x+5)+b=ax+5a+b \qquad (3.3)$$

додамо праві частини рівностей (3.2) та (3.3) , щоб отримати ліву частину рівняння (3.1): $ax+b+ax+5a+b=10x+11\Rightarrow 2ax+5a+2b=10x+11$

Прирівнявши коефіцієнт перед x та вільні члени, отримаємо два рівняння

$$2a=10 \quad та \quad 5\mathrm{a}+2\mathrm{b}=11$$

З першого та другого рівняння знайдемо значення коефіцієнту $a=5$, підставивши його у друге рівняння отримаємо $b=-7$. Легко переконатися, що отримана $f(x)=5x-7$ задовольняє дане рівняння.

Отже, один з усіх можливих розв'язків функціонального рівняння (3.1) буде функція $f(x)=5x-7$

Приклад 6. Розв'язати функціональне рівняння $f:R\to R$

$$f(x)-f(x-1)=-1 \qquad (3.4)$$

Розв'язання: Допустимо, що це рівняння має розв'язок $f(x)=c$, де $c\in R$.

Легко впевнитися в тому, що ця функція не являється розв'язком функціонального рівняння (3.4). Адже, $ff(x-1)=c$ f(1-x)= c, тому $f(x)-f(x-1)=0\neq -1$. Тепер допустимо, що знайдеться розв'язок у вигляді лінійної функції $f(x)=ax+b,\ де\ \mathrm{a}\in\mathrm{R},\ \mathrm{b}\in\mathrm{R}$ (3.5). Матимемо

$$f(x)-f(x-1)=ax+b-a(x-1)-b=-1\Rightarrow 2ax-a=-1,$$

отже $2a=0\ \ i\ -a=-1$, але значення а не може одночасно приймати два значення. Тому маємо висновок, що сконструювати розв'язок у вигляді лінійної функції не можна. Нехай розв'язок функціонального рівняння (3.4) матиме такий вигляд: $f(x)=ax^2+bx+c,\ \ де\ a\in R,\ b\in R,\ c\in R,$ (3.6)

У цьому випадку маємо

$$f(x)-f(x-1)=ax^2+bx+c-a(x-1)^2-b(x-1)-c\Rightarrow 2(a+b)x-a=-1$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x до нуля та вільні члени, отримаємо, що $a=1,\ b=-1$. Легко переконатися, що отримана $f(x)=x^2-x$ задовольняє дане рівняння. Отже, один з усіх можливих розв'язків функціонального рівняння (3.1) буде така функція $f(x)=x^2-x$.

Узагальнимо певні міркування. Аби бути повністю коректним, то розв'язок функціонального рівняння варто наполегливо шукати, лише для тих видів рівнянь, для яких доведено, що даний вид рівнянь за певних умов розв'язне, адже будувати вид розв'язку варто тоді, коли наперед знаєш, рівняння має розв'язок.

Приклад 7. Знайти розв'язок $f:R\to R$ функціонального рівняння

$$2004 - f^2(x) - f^4(1-x) = 2005 \qquad (3.7)$$

Розв'язання: Легко впевнитися в тому, що дане рівняння не має розв'язків: $-f^2(x) - f^4(1-x) = 1$. Ліва частина останньої рівності невід'ємна, а права - додатна.

2.4. Застосування способів розкладу на множники для знаходження розв'язку функціонального рівняння

Приклад 8. Знайти розв'язок $(f;g)$, де $f: R \to R$, $g: R \to R$ функціонального рівняння $y^3 f(x) - f(x)\cdot g(y) - x^3 y^3 + x^3 g(y) = 0$

Розв'язання: Розпочнемо групувати доданки та виносити спільний множник за дужки: $f(x)(y^3 - g(y)) - x^3(y^3 - g(y)) = 0 \Rightarrow (f(x) - x^3)(y^3 - g(y)) = 0$

Таким чином, маємо розв'язок: $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$, який перевіряємо для даного рівняння.

Відповідь: $(x^3; y^3)$.

Приклад 9. Знайти розв'язок $(f;g)$, де $f: R \to R$, $g: R \to R$ функціонального рівняння та перевірити його, якщо:

$$f(x)g(y) + 2xg(y) - yf(x) - 4g(y) + 3f(x) - 2xy + 4y + 6x = 12$$

Розв'язання: Розпочнемо групувати доданки та виносити спільний множник за дужки:

$$2xg(y) - 2xy + 6x + f(x)g(y) - yf(x) + 3f(x) - 4g(y) + 4y - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x(g(y) - y + 3) + f(x)(g(y) - y + 3) - 4(g(y) - y + 3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2x + f(x) - 4)(g(y) - y + 3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2x + f(x) - 4) = 0 \ \textit{або} \ (g(y) - y + 3) = 0 \Rightarrow$$

Таким чином, маємо розв'язок $f(x) = 4 - 2x$, $g(y) = y - 3$, який перевіряємо для даного рівняння.

Відповідь: $(4 - 2x; y - 3)$.

2.5 Знаходження розв'язку функціонального рівняння, які зводяться до квадратного виду.

Функціональне рівняння виду: $af^{2}(x)+bf(x)+c=0$, (5.1) де *a, b, c,* – ненульові відомі функції дійсного аргументу *x, f* – невідома функція дійсного аргументу формально може мати розв'язок, якщо $D=b^2-4ac\geq 0$. Його можна знайти за стандартною схемою розв'язання квадратних рівнянь.

Приклад 10. Знайти розв'язок $f:R\to R$ функціонального рівняння та перевірити його, якщо $f^{2}(x)-\cos(x)\cdot f(x)-0{,}25-0{,}5\cdot\cos(x)=0$ (5.2)

Розв'язання: Розпочнемо конструювати дискримінант, щоб впевнитися, чи має рівняння розв'язки: $D=b^2-4ac=(-\cos(x))^2-4(-0{,}25-0{,}5\cos(x))=(1+\cos(x))^2\geq 0$

За формулою розв'язків квадратного рівняння відшукуємо

$$f_1(x)=\frac{\cos(x)-1-\cos(x)}{2}=-\frac{1}{2};\quad f_2(x)=\frac{\cos(x)+1+\cos(x)}{2}=\cos(x)+\frac{1}{2}$$

Таким чином, два розв'язки $f_1(x)=-\frac{1}{2}$, $f_2(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}$ перевіряємо для даного рівняння. (5.2).

Відповідь: $f_1(x)=-\frac{1}{2}$, $f_2(x)=\cos(x)+\frac{1}{2}$

Приклад 11. Знайти розв'язок $f:R\to R$ функціонального рівняння та перевірити його, якщо $-f^{2}(x)-\sin(x)f(x)+0{,}25-0{,}5\sin(x)=0$ (5.3)

Розв'язання: Розпочнемо конструювати дискримінант, щоб впевнитися, чи має рівняння розв'язки: $D=b^2-4ac=(-\sin(x))^2-4(0{,}25+0{,}5\sin(x))(-1)=(1+\sin(x))^2\geq 0$ За формулою розв'язків квадратного рівняння відшукуємо:

$$f_1(x)=\frac{\sin(x)-1-\sin(x)}{2}=\frac{1}{2};\quad f_2(x)=\frac{\sin(x)+1+\sin(x)}{2}=\sin(x)+\frac{1}{2}$$

Таким чином, два розв'язки $f_1(x)=\frac{1}{2}$, $f_2(x)=\sin(x)+\frac{1}{2}$ перевіряємо для заданого рівняння (5.3).

Відповідь: $f_1(x)=\frac{1}{2}$, $f_2(x)=\sin(x)+\frac{1}{2}$

2.6 Розв’язування функціональних рівнянь методом підстановки.

Найбільший клас функціональних рівнянь розв’язується методом підстановок. Суть цього методу полягає в тому, що ми припускаємо, що дане рівняння має розв’язок, застосовуємо до змінних, які входять до рівняння, деякі підстановки. Дістаємо систему рівнянь, що містить шукану функцію. Після розв’язування системи безпосередньою перевіркою необхідно переконатись, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Зазначимо, що метод підстановок потребує вдалого вибору підстановок, які складають велику трудність у їх пошуку, та не завжди знаходить всю множину розв’язків.

Розглянемо приклади:

Приклад 12. Знайти всі функції $f : R \to R$, які при всіх $x, y \in R$ задовольняють рівнянню

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-x)y \qquad (6.1)$$

Розв’язання: Нехай f – функція, що задовольняє (6.1). Оскільки (6.1) виконується при всіх значеннях змінних x та y, то воно буде виконуватися і при конкретних значеннях цих змінних. Підставивши, наприклад, $y=0$ у початкове рівняння, ми одержимо $f(x) = x$. Ця рівність повинна виконуватися при будь-якому дійсному x.

Таким чином, $(1) \Rightarrow f(x) \equiv x$, або, іншими словами, ніяка функція крім $f(x) = x$ не може задовольняти рівняння (6.1). Безпосередня перевірка показує, що знайдена функція дійсно задовольняє рівнянню при всіх $x, y \in R$.

Відповідь: $f(x) = x$

Приклад 13. Знайти всі функції $f : R \to R$, які при всіх $x, y \in R$ задовольняють рівнянню

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-\sin x)y \qquad (6.2)$$

Розв’язання: Так само, як і в попередньому прикладі, встановлюємо, що для функції f, яка задовольняє (6.2), повинна виконуватися тотожність $f(x) \equiv x$. Однак, підставивши функцію $f(x) = x$ в (6.2), ми тотожності не одержимо. Оскільки жодні інші функції також не можуть бути розв'язками (6.2), то дане рівняння розв'язків не має.

Приклад 14. Розв'язати функціональне рівняння $f : R \to R$ та перевірити його, якщо $f(x)+f(x-2y)-f(x+2y)=2x+8y$ (6.3)

Розв'язання: Розпочнемо конструювати підстановки так, щоб отримати систему рівнянь для пошуку невідомої функції $f(x)$. Помічаємо, якщо $y=x$, то $f(x)+f(-x)-f(3x)=-6x$, а якщо $y=-x$, то $f(x)+f(3x)-f(-x)=10x$, таким чином, якщо додамо два останні рівняння, то матимемо $2f(x)=4x$, звідки $f(x)=2x$. Безпосередньою перевіркою впевнюємося, що функція $f(x)=2x$ є розв'язком даного рівняння (6.3)

Приклад 15. Розв'язати дане функціональне рівняння, якщо $f : R \to R$, $f(0)=0$: $3f(x)-2f(x-y)-f(x+y)=y$ (6.4)

Розв'язання: Розпочнемо конструювати підстановки так, щоб отримати систему рівнянь для пошуку невідомої функції $f(x)$. Помічаємо, якщо $x=0,\ y=x$, тоді $-2f(-x)-f(x)=x$, (6.5) а якщо $y=2x$, то $3f(x)-2f(-x)-f(3x)=2x$, а якщо y=-2x, то $3f(x)-2f(3x)-f(-x)=-2x$, таким чином, якщо додамо та віднімемо два останні рівняння, то матимемо два рівняння:

$$\begin{cases} f(3x)+f(-x)-2f(x)=0 \\ f(3x)-f(-x)=4x \end{cases} \Rightarrow f(-x)-f(x)=-2x, \qquad (6.6)$$

Розв'язуючи нарешті систему з двох рівнянь (6.5) та (6.6), дістанемо: $f(x)=x$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося, що функція $f(x)=x$ є розв'язком даного рівняння (6.4)

Приклад 16. Знайдіть усі функції, визначені на множині $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, що задовольняють співвідношенню $(x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x$.

Розв'язання:

Надамо x значення $\frac{x+1}{x-1}$. Одержимо

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\cdot f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow\frac{2}{x-1}f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Одержали систему:

$$\begin{cases}(x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x\\ \frac{2}{x-1}f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+f(x)}{x-1}\\ \frac{2}{x-1}f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+f(x)}{x-1}\\ \frac{2}{x-1}f(x)-\frac{x+f(x)}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+f(x)}{x-1}\\ \left(\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x-1}\right)f(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+f(x)}{x-1}\\ \frac{1}{x-1}f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+f(x)}{x-1}\\ f(x)=2x+1\end{cases}$$

Перевіримо, чи дійсно функція $f(x)=2x+1$ задовольняє початковому рівнянню

$$(x-1)\cdot\left(2\frac{x+1}{x-1}+1\right)-2x-1=x\Rightarrow 2x+2+x-1-2x=x\Rightarrow x=x$$

Відповідь: $f(x)=2x+1$.

Приклад 17. Знайдіть усі функції, визначені на множині допустимих значень, що задовольняють співвідношенню $f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$.

Розв'язання:

1) Нехай $\frac{x-2}{x+1}=z\Rightarrow x=\frac{z+2}{1-z},\ z\neq 0,\ z\neq 1$

2) Підставимо у дане рівняння, одержимо $f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z}$

3)Замінимо z на $\frac{1}{z}$ одержимо $f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}}$ або після перетворень у правій частині: $f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}$

4)Отже, маємо систему двох рівнянь: $\begin{cases}f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z}\\ f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}\end{cases}$

5) Помножимо обидві частини першого рівняння на (-2) і додамо до нього друге рівняння, одержимо:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{z}\right)+2f(z)=\frac{z+2}{1-z} \\ f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f\left(\frac{1}{z}\right)-4\cdot f(z)=\frac{-2z-4}{1-z} \\ 2f\left(\frac{1}{z}\right)+f(z)=\frac{1+2z}{z-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2f\left(\frac{1}{z}\right)-4\cdot f(z)=\frac{-2z-4}{1-z} \\ -3f(z)=\frac{1+2z+2z+4}{z-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3f(z)=\frac{4z+5}{z-1} \Rightarrow f(z)=\frac{4z+5}{3-3z}$$

Таким чином, $f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$.

Приклад 18. Знайдіть усі функції $f: R\to R$, які при всіх $x, y\in R$ задовольняють рівняння $f\left(x+y^2+2y+1\right)=y^4+4y^3+2xy^2+5y^2+4xy+2y+x^2+x+1$ (1)

Розв'язання: оскільки нам потрібно отримати значення $f(x)$, попробуємо позбутися доданка y^2+2y+1 під знаком функції. Рівняння $y^2+2y+1=0$ має один розв'язок $y=-1$. Підставимо $y=-1$ в (1) отримаємо: $f(x)=x^2-x+1$.

Відповідь: $f(x)=x^2-x+1$.

Приклад 19. Знайдіть усі функції $f: R\to R$, які при всіх $x,\ y\in R$ задовольняють рівняння

$$f\left(\left(x^2+6x+6\right)y\right)=y^2x^4+12y^2x^3+48x^2y^2-4yx^2+72xy^2+24yx+36y^2-24 \quad (1)$$

Розв'язання: Нам потрібно отримати під знаком функції вільну зміну (x або y). В даному випадку простіше отримати y. Розв'язком рівняння $x^2+6x+6=0$ є числа: $x_1=-1,\ x_2=-5$. Підстановка будь-якого із цих значень в (1) дає таке рівняння: $f(y)=y^2-4y$.

Відповідь: $f(y)=y^2-4y$.

Приклад 20. Розв'язати функціональне рівняння: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$.

Розв'язання: Здійснимо підстановку $y=\frac{1}{x}$. Тоді $f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{3}{y}$. Отримаємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{3}{y} \\ f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \end{cases} \Rightarrow f(y)=\frac{2}{y}-y$

Відповідь: $f(y)=\frac{2}{y}-y$.

Приклад 21. Знайти розв'язок системи функціональних рівнянь відносно невідомих функцій $f(x)$ *і* $g(x)$:

$$\begin{cases} f(2x)+2g(2x)=\frac{2x^2+x+1}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x} \end{cases}$$

Розв'язання: У першому рівнянні здійснимо підстановку: $2x=\frac{1}{z}$. При цьому

$\frac{2x^2+x+1}{x}=\frac{2\left(\frac{1}{2z}\right)^2+\frac{1}{2z}+1}{\frac{1}{2z}}=\frac{2z^2+z+1}{z}$ тоді перше рівняння прийме вид:

$f\left(\frac{1}{z}\right)+2g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{2z^2+z+1}{z}$ *або* $f\left(\frac{1}{x}\right)+2g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x+1}{x}$. В результаті отримуємо таку систему рівнянь: $\begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right)+2g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x^2+x+1}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x} \end{cases}$ розв'язком якої є такі функції:

$g(x)=\frac{1}{x},\quad f(x)=x+1$

Відповідь: $g(x)=\frac{1}{x},\quad f(x)=x+1$

Приклад 22. Знайти всі розв'язки функціонального рівняння:

$f(xy)=y^k f(x)\quad (k\in N)$

Розв'язання. Нехай $x=0$, тоді $f(0)=y^k f(0)$. Так як y довільна функція, то $f(0)=0$.

Нехай тепер $x\neq 0$. Здійснимо таку підстановку $y=\frac{1}{x}$, отримаємо $f(1)=\left(\frac{1}{x}\right)^k f(x)$ звідки $f(x)=ax^k,\ a=f(1)$. Легко бачити, що ця функція і є розв'язком заданого функціонального рівняння.

Відповідь: $f(x)=ax^k,\ a=f(1)$

Приклад 23. Нехай $a\neq\pm1$ — деяке дійсне число. Знайти функцію $f(x)$, визначену при всіх $x\neq 1$і яка задовольняє рівняння: $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — задана функція, яка визначена для всіх $x\neq 1$.

Розв'язання. При заміні $x=\frac{x}{x-1}$ отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x) \\ f(x)=af\left(\frac{x}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\end{cases}$$ розв'язком якої при $a^2\neq 1$ є функція: $f(x)=\dfrac{a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1-a^2}$

Приклад 24. Знайти усі такі функції $f(x)$, що $f(2x+1)=4x^2+14x+7$.

Розв'язання. Нехай $t=2x+1$, тоді $x=\frac{t-1}{2}$. Замінивши змінну в рівнянні $f(2x+1)=4x^2+14x+7$, одержимо:

$$f(t)=4\cdot\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+14\cdot\frac{t-1}{2}+7 \Leftrightarrow f(t)=t^2-2t+1+7t-7+7 \Leftrightarrow f(t)=t^2+5t+1.$$

В останньому співвідношенні для функції $f(t)$ замість змінної (букви) t може виступати будь-яка інша змінна (буква). Тому, замінивши букву t на букву x, одержимо: $f(x)=x^2+5x+1$.

Відповідь: $f(x)=x^2+5x+1$.

Приклад 25. Знайти $f(x)$, якщо для усіх $x \neq 0$ має місце співвідношення $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$.

Розв'язання. Припустимо, що функція $f(x)$, яка задовольняє функціональному рівнянню $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$, існує. Тоді можна виконати наведені нижче перетворення.

Нехай $t=\frac{1}{x}$, тоді $x=\frac{1}{t}$ і початкове рівняння приймає вид:

$$\left(\frac{1}{t}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}+3 \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} \text{перепозначення :} \\ t \leftrightarrow x \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+3.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} (x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3, \\ \left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+3. \end{cases}$$

З першого рівняння системи виражаємо $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{2}\cdot f(x).$$

Підставимо $f\left(\frac{1}{x}\right)$ в друге рівняння системи. Маємо:

$$\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{2}\cdot f(x)\right)+2f(x)=\frac{1+3x}{x}.$$

За умовою $x \neq 0$. Тому, помноживши обидві частини останнього рівняння на $2x$ і звівши подібні доданки, одержимо співвідношення:

$$f(x)\cdot(x-1)^2=(x-1)^2.$$

З цього випливає, що $f(x)=1$ при $x \neq 1$. При $x=1$ з початкового рівняння $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$ одержуємо $f(1)=1$.

Здійснивши перевірку, переконуємося, що функція $f(x)=1$ при усіх $x \neq 0$ задовольняє умову задачі.

Зауваження. В умові даної задачі не було вказано, що функція $f(x)$, яка задовольняє функціональному рівнянню $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$, існує. Припустив, що така функція $f(x)$ є, ми здійснили логічний перехід до наслідку. Тому перевірка в цьому випадку необхідна.

Відповідь: $f(x)=1,\ x \neq 0$.

2.7 Застосування поняття групи для знаходження розв'язку функціонального рівняння.

Означення групи функцій.

Довільна множина G функцій, визначених на деякій множині M називається групою відносно операції композиції, якщо вона володіє такими властивостями:

1. *Для будь-яких двох функцій з множини G Їх композиція також належить G.*
2. *Функція f(x)=x теж належить множині G.*
3. *Для будь-якої функції f(x) з множини G існує обернена функція f -1 (x), яка належить множині G.*

Знаючи функції, які утворюють групу, можна легко розв'язати великий клас функціональних рівнянь. Наведемо приклади таких груп:

1) $f(x)=x,\ g(x)=\dfrac{1}{1-x},\ v(x)=\dfrac{x-1}{x};$

2) $f(x)=x,\ g(x)=a-x;$

3) $f(x)=x,\ g(x)=\dfrac{a}{x};$

4) $f(x)=x,\ g(x)=\dfrac{a}{x},\ v(x)=-x,\ t(x)=-\dfrac{a}{x};$

5) $f(x)=x,\ g(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=-x,\ t(x)=-\frac{1}{x},\ w(x)=\frac{x-1}{x+1},$
$u(x)=\frac{x+1}{x-1},\ h(x)=\frac{1-x}{x+1}, s(x)=\frac{x+1}{1-x}$

Термін груп ввів французький математик Е.Галуа. Він здобув перші серйозні результати в теорії групи. Пізніше теорію групи вивчали інтенсивно. І до 1916 року, з виходом книжки російського математика О. Ю. Шмідта «Абстрактна теорія груп», теорія групи остаточно сформувалася як самостійна галузь математики.

Існує цілий клас функціональних рівнянь, що містять невідомі функції, які утворюють групу. Основні труднощі полягають у відшуканні групи та потребують великої уваги при перетворенні рівнянь та розв'язанні складених систем рівнянь. Оскільки рівняння, наведені у підручнику, розв'язуються із застосуванням поняття груп, розглянемо алгоритм.

Нехай у функціональному рівнянні вирази, що стоять під знаком невідомої функції є елементами групи, яка складається з декількох елементів. Припустимо, що дане рівняння має розв'язок і виконаємо операцію композиції послідовно для функцій групи. В результаті невідомі функції поміняються лише місцями і матимемо нове лінійне рівняння. Після всіх перетворень композиції дістанемо систему лінійних рівнянь, яку слід розв'язати , а потім перевірити, чи задовольняє розв'язок дане рівняння.

Розглянемо приклади рівнянь:

Приклад: Знайти розв'язок $f: R/\{0;1\}\to R$, якщо $2xf(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x$

Розв'язання: Множина функцій $p_1=x,\ p_2=\frac{1}{1-x},\ p_3=\frac{x-1}{x}$ утворюють групу. Виконаємо заміну $x=\frac{1}{1-x}$,та згодом на $x=\frac{x-1}{x}$. Отримаємо систему трьох рівнянь відносно невідомих: $f(x), f\left(\frac{1}{1-x}\right),\ f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Розв'язавши утворену систему рівнянь , отримаємо $f(x)=\frac{6x-2}{7x}$. Виконати перевірку потрібно обов'язково.

Відповідь: $f(x)=\frac{6x-2}{7x}$.

Приклад: Знайдіть функцію, яка задовольняє умову : $3f(x)+2f(-x)=-\frac{2}{x}$

Розв'язання

Вирази, що стоять під знаком функції, складають групу: $f(x)=x,\ g(x)=-x$.

Виконаємо операцію композиції і отримаємо друге рівняння: $3f(-x)+2f(x)=-\frac{2}{-x}=\frac{2}{x}$. Із двома рівняннями складаємо систему:

$$3f(x) + 2f(-x) = -\frac{2}{x};$$

$$3f(-x) + 2f(x) = -\frac{2}{-x} = \frac{2}{x};$$

Із другого рівняння виразимо f(-x):

$$3f(-x) = \frac{2}{x} - 2f(x);$$

$$f(-x) = \frac{2}{3x} - \frac{2}{3}f(x);$$

Підставимо у перше рівняння :

$$3f(x) + 2\left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{3}f(x)\right) = -\frac{2}{x};$$

$$3f(x) + \frac{4}{3x} - \frac{4}{3}f(x) = -\frac{2}{x};$$

$$3f(x) - \frac{4}{3}f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{4}{3x};$$

$$f(x)\left(\frac{3}{1} - \frac{4}{3}\right) = \frac{-6-4}{3x};$$

$$-\frac{5}{3}f(x) = -\frac{10}{3};$$

$$f(x) = -\frac{2}{x};$$

Перевірка: $3(-\frac{2}{x}) + 2(\frac{2}{x}) = -\frac{6}{x} + \frac{4}{x} = -\frac{2}{x}$.

Приклад: Знайдіть функцію, яка задовольняє умову

$$2f(x) + f(-\frac{1}{x}) = \frac{3x-6}{x}.$$

Розв'язання:

Функції, що входять у дане рівняння, утворюють групу. Виконаємо для них операцію композиції , замість аргументу x, підставимо аргумент другої функції $-\frac{1}{x}$, отримаємо друге рівняння:

$$2f(-\frac{1}{x}) + f(x) = -\frac{3-(-\frac{1}{x})-6}{\frac{1}{x}} = -(\frac{3}{x} - \frac{6}{\frac{1}{x}}) = -(\frac{3}{x} - 6)x = -(\frac{3}{x} - 6x) = 6x - \frac{3}{x}.$$

Із 1 та 2 рівняння складаємо систему:

$$2f(x) + f(-\frac{1}{x}) = \frac{3x-6}{x}.$$

$$2f(-\frac{1}{x}) + f(x) = 6x - \frac{3}{x};$$

Із 1 рівняння виразимо $f(-\frac{1}{x})$

$$f(-\frac{1}{x}) = \frac{3x-6}{x} - 2f(x);$$

Підставимо у 2 рівняння:

$$2(\frac{3x-6}{x} - 2f(x)) + f(x) = 6x - \frac{3}{x};$$

$$\frac{6x-12}{x} - 4f(x) + f(x) = 6x - \frac{3}{x};$$

$$-3f(x) = 6x - \frac{3}{x} - \frac{6x-12}{x};$$

$$-3f(x) = \frac{6x-3-6x+12}{x};$$

$$-3f(x) = \frac{9}{x};$$

$$f(x) = -\frac{3}{x};$$

Перевірка:

$$2\left(-\frac{3}{x}\right)+\left(-\frac{3}{-\frac{1}{x}}\right)=-\frac{6}{x}-3x=\frac{6-3x}{x}=\frac{3x-6}{x}.$$

Приклад: Розв'язати функціональне рівняння: $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=6\sqrt{x}$;

Розв'язання:

Вирази, що стоять під знаком невідомої функції утворюють групу

$G\{g_1, g_2\}$, *де* $g_1=x,\ g_2=\frac{1}{x}$; Зробимо послідовні підстановки: $x\to\frac{1}{x}$;

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}};$$

Маємо систему із двох рівнянь: $\begin{cases}2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=6\sqrt{x}\\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}}\end{cases}$

Розв'язуємо систему методом додавання:

$$\begin{cases}2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=6\sqrt{x}\\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=12\sqrt{x}\\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}}\end{cases}\Rightarrow 3f(x)=\frac{12x+6}{\sqrt{x}}\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{x}(2x+1)}{x}$$

Необхідно зробити перевірку:

$$\frac{4\sqrt{x}(2x+1)}{x}-\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{4\sqrt{x}(2x+1)}{x}--\frac{2(2+x)}{\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}(2x+1)}{x}--\frac{2\sqrt{x}(2+x)}{x}=$$

$$\frac{8x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}{x}=\frac{6x\sqrt{x}}{x}=6\sqrt{x}$$

Відповідь: $f(x)=\frac{2\sqrt{x}(2x+1)}{x}$;

Приклад: Знайдіть усі функції $f: R\{-1;0;1\}\to R$, які задовольняють рівняння:

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1; \qquad (1)$$

Розв'язання:

Вирази, що стоять під знаком невідомої функції входять до групи

$G\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, *де* $g_1 = x,\ g_2 = \frac{x-1}{x+1},\ g_3 = -\frac{1}{x},\ g_4 = \frac{x+1}{1-x};$

Введемо заміну: $x \to \left(\frac{x-1}{x+1}\right);\ x \to -\frac{1}{x};\ x \to \frac{x+1}{1-x}.$

Заміна: $x \to \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\left(\frac{x-1}{x+1}\right) f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right) f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(\frac{-2}{x+1} : \frac{2x}{x+1}\right) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right) f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1;$$

$$\left(\frac{-1}{x}\right) f\left(\frac{-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{\frac{-1}{x}-1}{\frac{-1}{x}+1}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{-1}{x}\right) f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\left(\frac{x+1}{1-x}\right) f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f\left(\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{x+1}{1-x}\right) f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1$$

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \\ \frac{x-1}{x+1} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(\frac{-1}{x}\right) = 1 \\ \frac{-1}{x} f\left(\frac{-1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1 \\ \frac{x+1}{1-x} f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1 \end{cases}$

Послідовно виключаючи невідомі: $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right), f\left(-\frac{1}{x}\right), f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, отримаємо:

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}.$$

Відповідь: $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}$

Приклад : Знайдіть усі функції, які задовольняють рівняння: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-x^2}{x}$

Розв'язок:

Здійснимо заміну x на $\frac{1}{x}$, отримаємо: $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x}$.

Отримаємо таку систему двох рівнянь: $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{3-x^2}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x} \end{cases}$. Помножимо друге рівняння на (-2) та додамо до першого рівняння:

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{3-x^2}{x} \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{3-x^2}{x} \\ -2f\left(\frac{1}{x}\right)-4f(x)=\dfrac{-6x^2+2}{x} \end{cases} \Rightarrow -3f(x)=\dfrac{-6x^2+2+3-x^2}{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{7x^2-5}{3x}$$

Відповідь: $f(x)=\dfrac{7x^2-5}{3x}$

Приклад: Знайдіть усі функції, які задовольняють рівняння: $2f(x)+f(1-x)=x^2$

Розв'язок:

Здійснимо заміну в рівнянні x на 1-x, отримаємо: $2f(x-1)+f(x)=(1-x)^2$. Отримаємо таку систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(x-1)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4f(x)-2f(1-x)=-2x^2 \\ 2f(x-1)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4f(x)-2f(1-x)=-2x^2 \\ 2f(x-1)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow -3f(x)=-2x^2+1-2x+x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$$

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. Знайти всі розв'язки функціонального рівняння: $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$ при умові , що $x\neq 0, x\neq 1$. *Відповідь:* $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right).$

Задача 2. Знайти всі функції $f(x)$, для яких виконується рівність: $f(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$ при $x\neq 0, x\neq \pm 1$. *Відповідь:* $f(x)=-\frac{1}{15}\left(x-2\frac{x-1}{x+1}-4\frac{1}{x}-8\frac{1+x}{1-x}\right)$

Задача 3. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, такі , що

$f(x)-f\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{3}{5}x,\ x\in R.$ *Відповідь:* $f(x)=\frac{9}{5}x$

Задача 4. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, якщо при всіх $x\in R$:

$2f(2x)=f(x)+x$ *Відповідь:* $f(x)=\frac{x}{3}.$

Задача 5. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, якщо при всіх $x\in R$:

$f(x)=f\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Відповідь: $f(x)=const.$

Задача 6. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, якщо при всіх $x\in R$:

$f(5x+3)=5f(x)$

Відповідь: $f(x)=cx+\frac{3}{4}c,\quad$ *де* $c=const.$

Задача 7. Знайти всі неперервні функції $f:R\to R$, якщо при всіх $x\in R$:

$f(x^2)+f(x)=x+x^2$

Відповідь: $f(x)=x$

Задача 8. Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, якщо при всіх $x \in R,\ y \in R,$ вони задовольняють функціональне рівняння: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$. *Відповідь:* $f(x) = x^2 + bx, \quad де \ \ b \in R.$

Задача 9. Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, якщо при всіх $x \in R,\ y \in R,$ вони задовольняють функціональне рівняння: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2$. *Відповідь:* $f(x) = x^3 + bx, \quad де \ \ b \in R.$

Задача 10. Знайти всі неперервні функції $f: R \to R$, якщо при всіх $x \in R,\ y \in R,$ вони задовольняють функціональне рівняння: $f(x-y) = f(x) - f(y) - 3x^2y + 3xy^2$. *Відповідь:* $f(x) = x^3 + bx, \quad де \ \ b \in R.$

Задача 11. Знайти всі функції $f: R \to R$, обмежені в околі нуля і при всіх $x \in R$ задовольняють функціональне рівняння: $f(x) - \frac{1}{3} f\left(\frac{x}{2}\right) = x^3$. *Відповідь:* $f(x) = \frac{24}{23} x^3$

Задача 12. Знайти всі функції $f: R \to R$, обмежені в околі нуля і при всіх $x \in R$ задовольняють функціональне рівняння: $f(x) - \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2$. *Відповідь:* $f(x) = \frac{36}{35} x^2$

Задача 13. Знайти всі функції $f: R \to R$, якщо при всіх $x \in R,\ y \in R,$ вони задовольняють функціональне рівняння: $f(x) \cdot f(y) = f(x-y) + a \cdot x \cdot y + 2\sqrt{a} \cdot y, \quad a \geq 0$. *Відповідь:* $f(x) = \sqrt{a} \cdot x + 1$

Задача 14. Знайти всі функції $f: R \to R$, якщо при всіх $x \in R,\ y \in R,$ вони задовольняють функціональне рівняння: $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2a \cdot x \cdot y + 2b \cdot y$, де a та b – задані дійсні числа. *Відповідь:* $f(x) = ax^2 + b \cdot x$

Задача 15. Знайти всі функції $f(x)$ *і* $g(x)$, які визначені на R та задовольняють функціональне рівняння: $f(x) - f(y) + g(x) + g(y) = \sin(x) + \cos y$ при всіх $x \in R,\ y \in R$. *Відповідь:* $f(x) = \frac{\sin x - \cos y}{2} + c, \quad g(x) = \frac{\sin x + \cos y}{2} + c, \quad c = const$

Задача 16. Знайти всі функції $f: R \to R$, які визначені та неперервні на R і задовольняють функціональне рівняння: $f^2\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(y) \cdot f(x)$ при всіх $x \in R,\ y \in R$. *Відповідь:* $f(x) = c \cdot a^x, \quad a > 0, \ c = const$

Задача 17. Знайти всі функції $f: R \to R$, які визначені та неперервні на R і задовольняють функціональне рівняння: $\ell^{k \cdot x} f(y) = f(x+y) - f(x)$, $k \neq 0$ при всіх $x \in R,\ y \in R$. *Відповідь:* $f(x) = c \cdot \left(\ell^{k \cdot x} - 1\right)$, $c = const$

Задача 18. Знайти всі функції $f: R \to R$, які визначені та неперервні на R і задовольняють функціональне рівняння: $f(x \cdot y) = \dfrac{f(y) + f(x)}{x+y}$, $x + y \neq 0$ при всіх $x \in R,\ y \in R$. *Відповідь:* $f(x) = 0$

Задача 19. Знайти всі функції $f: (0, +\infty) \to R$, які неперервні в точці $x = 1$ і задовольняють при $x, y > 0$ функціональне рівняння: $f(x \cdot y) = xf(y) + yf(y)$.

Відповідь: $f(x) = cx \ln x,\ c \in R$

Задача 20. Знайти всі функції $f: R \to R$, які визначені та неперервні на R і задовольняють функціональне рівняння: $f(f(f(x))) = x$ при всіх $x \in R$. *Відповідь:* $f(x) = x$

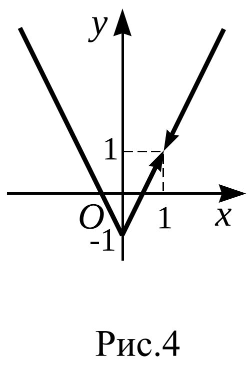
Задача 21. Знайти значення $f(f(1))$, якщо $f(x) = \begin{cases} 7 - 2x, & x < 2, \\ 2x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$

Відповідь: 9.

Задача 22. Нехай $f(x) = \sqrt{2x - 7}$, $g(x) = \dfrac{3x^2 - 22x + 35}{x^2 - 4x - 5}$. Розв'язати нерівність $f(4) \leq g(f(x+3))$.

Відповідь: $[8{,}5; 13) \cup (13; +\infty)$.

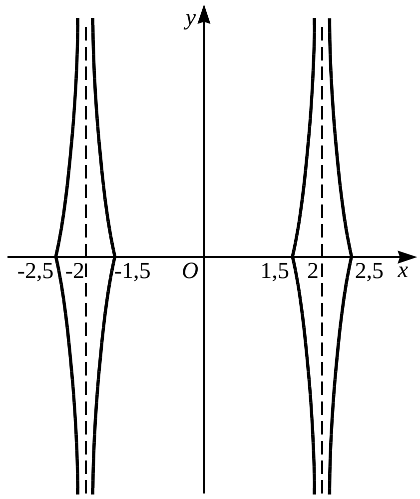
Задача 23. Побудувати графік функції $y = 2 \cdot | f(f(x)) | - 1$, де $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.



Відповідь: $y = \begin{cases} -1 - 2x, & x < 0, \\ 2x - 1, & x \geq 0, \quad x \neq 1, \end{cases}$ див. рис. 4

Рис.4

Задача 24. Зобразити на площині *Oxy* множину точок, координати яких задовольняють умову $|y| = f\left(\left|\dfrac{1}{f(|x|)}\right|\right)$, де $f(x) = x - 2$.

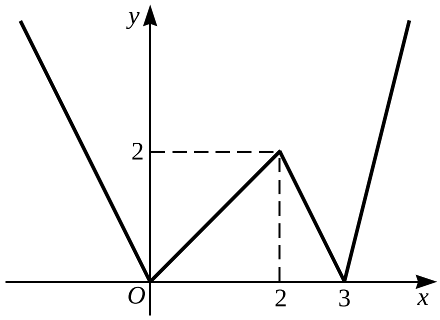


Відповідь: $|y| = \dfrac{1}{\left||x|-2\right|} - 2$, див. рис. 5

Рис.5

Задача 25. Побудувати графік функції $y = f(f(x))$, де

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{если} \quad x \le 2, \\ 2x - 4, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$



Відповідь: $f(f(x)) = \begin{cases} -2x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 6 - 2x, & 2 < x \le 3, \\ 4x - 12, & x > 3, \end{cases}$ див. рис. 6

Рис.6

Висновок

В своїй роботі я намагалась систематизувати практичний підхід до проблеми розв'язання функціональних рівнянь. В силу специфічності даної проблеми (при написанні курсової я переконалася, що неможливо обмежитися певною кількістю універсальних методів щодо розв'язання функціональних рівнянь), можливо, далеко не всі прийоми і способи були викладені в даній роботі. Але даний матеріал, я вважаю, стане у нагоді тим учням, які тільки починають знайомитись з функціональними рівняннями, а також буде корисним вчителям при підготовці дітей до олімпіади і при проведенні занять з поглибленого вивчення математики.

Перелік використаних джерел.

1. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х.: Вид. група „Основа”, 2008. – 255,: С. 123 – 170.

2. Лопшиц А.М. Функциональные уравнения. – Квант. – 1975. – № 1. – С. 30-35.

3. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. – К.: Вища шк., 1993.

4. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. – К.: Вища шк., 1993.

5. Недокіс В.А. Про функціональне рівняння Коші / У світі математики, 1998. Том 4, випуск 2. – Київ.

6. Никольский С.М. Элементы математического анализа. – М.: Наука, 1981.

7. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – С-Пб: Лань, 1997. – 160 с.

8. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. – Мю: Просвещение, 1965. – 540 с.

9. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения: Учеб. пособие для вузов/К.Б. Сабитов. — М.: Высш. шк., 2005. — 671 с: ил.